

Phân loại đại số Lie bất khả quy 6 chiều lớp MD có Ideal dẫn xuất với số chiều không quá 2

Trần An Hải^{a*}, Nguyễn Văn An^b

Tóm tắt:

Trong bài báo này, chúng tôi phân loại đại số Lie bất khả quy 6 chiều thuộc lớp MD có ideal dẫn xuất với số chiều không quá 2. Đồng thời chúng tôi cũng chứng minh rằng số chiều của ideal dẫn xuất của các đại số Lie này phải bằng 2.

Từ khóa: đại số Lie, lớp MD, ideal dẫn xuất, K-quỹ đạo, bất khả quy

^a Học viện Ngân hàng; 12 Chùa Bộc, phường Kim Liên, TP. Hà Nội. email: haita@hvnh.edu.vn

^b Học viện Ngân hàng; 12 Chùa Bộc, phường Kim Liên, TP. Hà Nội. email: annv@hvnh.edu.vn

* Tác giả chịu trách nhiệm chính.

Classification of 6-Dimensional MD-Class Lie Algebras Whose Derived Ideals Has Dimension at Most 2.

Tran An Hai^{a*}, Nguyen Van An^b

Abstract:

In this paper, we classify 6-dimensional Lie algebras belonging to the MD class whose derived ideal has dimension at most 2. At the same time, we also prove that the dimension of the derived ideal of these Lie algebras must be equal to 2.

Keywords: *Lie algebra, MD-class, derived ideal, K-orbits, irreducible*

Received: 14.4.2026. **Accepted:** 15.8.2026. **Published:** 30.8.2026

DOI: 10.59907/daujs.5.4.2026.592

^a Banking Academy; 12 Chua Boc Street, Kim Lien Ward, Hanoi City, Vietnam. email: haita@hvn.edu.vn

^b Banking Academy; 12 Chua Boc Street, Kim Lien Ward, Hanoi City, Vietnam. email: annv@hvn.edu.vn

* Corresponding author.

Giới thiệu

Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực hữu hạn chiều, G là nhóm Lie liên thông đơn liên tương ứng và $Ad: G \rightarrow Aut(\mathcal{G})$ là biểu diễn phụ hợp của nó trong $\mathcal{G}$. Khi đó G tác động trên không gian đối ngẫu $\mathcal{G}^*$ của $\mathcal{G}$ bởi $Ad^*: G \rightarrow Aut(\mathcal{G}^*)$ với

$$\langle Ad_g^*(f), x \rangle = \langle f, Ad_{g^{-1}}(x) \rangle \quad (f \in \mathcal{G}^*, x \in \mathcal{G}, g \in G).$$

Đây chính là K - biểu diễn của nhóm Lie G và quỹ đạo của nó trong $\mathcal{G}^*$ được gọi là K- quỹ đạo (Kirilov, A. A, 1976).

Định nghĩa 1. Ta nói rằng đại số Lie $\mathcal{G}$ thỏa mãn tính chất MD nếu chiều của mọi K- quỹ đạo trong $\mathcal{G}^*$ là 0 hoặc cực đại.

Nếu $\mathcal{G}$ là một đại số Lie giải được và thỏa mãn tính chất MD thì nó được nói thuộc lớp MD. Đây là lớp đại số Lie thú vị và quan trọng, bởi vì C^* - đại số của các nhóm Lie tương ứng của chúng có thể được nghiên cứu bằng các phương pháp của K-lý thuyết đồng điều (Diep, D.N, 1974; Son, V. M, Viet, H. H., 1984).

Cho đến nay, chưa giải quyết được vấn đề phân loại các đại số Lie bất kỳ thuộc lớp MD, nhưng các đại số Lie có số chiều không lớn hơn 5 đã được phân loại triệt để (Viet, H. H., 1986; Vu, L. A., 1990; Tra, D. V., 1984 và 1993). Mục tiêu của bài báo này là phân loại tất cả các đại số Lie 6 chiều thuộc lớp MD có ideal dẫn xuất với chiều không lớn hơn 2. Phương pháp của chúng tôi rất sơ cấp. Nói một cách đại khái, chúng tôi chỉ sử dụng các kỹ thuật của đại số Lie và đại số tuyến tính.

Kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa 2. Một đại số Lie được gọi là bất khả quy nếu nó không thể phân tích thành tổng trực tiếp của hai ideal không tầm thường.

Rõ ràng là mọi đại số Lie giao hoán đều thuộc lớp MD. Ta sẽ ký hiệu đại số Lie giao hoán n -chiều bởi $\mathbb{R}^n$.

Định lý 1 (Tra, D. V., 1993). Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thuộc lớp MD. Khi đó $\mathcal{G}$ phân tích được thành tổng trực tiếp: $\mathcal{G} \cong \mathbb{R}^n \oplus \tilde{\mathcal{G}}$, trong đó $\dim \mathcal{G} \geq n \geq 0$ và $\tilde{\mathcal{G}}$ là một ideal bất khả quy của $\mathcal{G}$.

Định lý 1 cho phép ta tập trung sự nghiên cứu vào các đại số Lie lớp MD bất khả quy.

Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie. Ideal dẫn xuất của $\mathcal{G}$, ký hiệu $\mathcal{G}^1$, là ideal sinh bởi tất cả các ngoặc Lie của các phần tử trong $\mathcal{G}$. Ideal dẫn xuất của $\mathcal{G}^1$ được ký hiệu là $\mathcal{G}^2$.

Xét đại số Lie $\mathcal{G}$ và đại số Lie thương $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathcal{G}^2$. Giả sử $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ là đồng cấu tự nhiên và $\pi^*: \tilde{\mathcal{G}}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ là đồng cấu cảm sinh, xác định bởi công thức:

$$\langle \pi^*(\tilde{f}), x \rangle = \langle \tilde{f}, \pi(x) \rangle \quad (\tilde{f} \in \mathcal{G}^*, x \in \mathcal{G}).$$

Rõ ràng π^* là một đơn cấu từ $\tilde{\mathcal{G}}^*$ vào $\mathcal{G}^*$ và có thể đồng nhất $\mathcal{G}^{2*}$ với một không gian con của $\mathcal{G}^*$.

Mệnh đề (Tra, D. V., 1993). Không gian $\mathcal{G}^*$ là tổng trực tiếp của $\pi^*(\tilde{\mathcal{G}})$ và $\mathcal{G}^{2*}$.

Định lý 2 (Tra, D. V., 1993). Với mọi $\tilde{f} \in \mathcal{G}^*$ ta có

$$\dim \tilde{\Omega}_{\tilde{f}} = \dim \Omega_{\pi^*(\tilde{f})}.$$

Định lý 2 cho phép ta tập trung sự nghiên cứu vào đại số Lie lớp MD có ideal dẫn xuất giao hoán.

Trong phần tiếp theo, với $\mathcal{G}$ là một đại số Lie và f là một phần tử của $\mathcal{G}^*$ thì ta sẽ ký hiệu B_f là một dạng song tuyến tính phản đối xứng trong $\mathcal{G}$, xác định bởi

$$B_f(x, y) = \langle f, [x, y] \rangle \quad (x, y \in \mathcal{G}).$$

Ta sẽ ký hiệu ad_e^1 là thu hẹp của ad_e trên $\mathcal{G}^1$ đối với mỗi phần tử e thuộc $\mathcal{G}$. Nếu $\{e_1, e_2, \dots\}$ là một cơ sở của $\mathcal{G}$ thì $\{e_1^*, e_2^*, \dots\}$ sẽ biểu thị cơ sở đối ngẫu của nó trong $\mathcal{G}^*$.

Kết quả chính

Định lý 3. Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie bất khả quy 6 chiều có $\dim \mathcal{G}^1 \leq 2$. Khi đó nếu $\mathcal{G}$ thuộc lớp MD thì nó đẳng cấu với một đại số Lie có cơ sở $\{e_i\}_{i=1}^6$ thỏa mãn:

$$\text{ideal dẫn xuất là } \text{gen}(e_5, e_6) = \mathbb{R}^2;$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_3, e_4] = e_5, [e_2, e_4] = ae_5 + be_6, (a^2 + 4b < 0), \\ [e_1, e_4] &= [e_2, e_3] = 0, ad_{e_1}^1 = ad_{e_2}^1 = ad_{e_3}^1 = ad_{e_4}^1 = 0. \end{aligned}$$

Để chứng minh Định lý 3, chúng tôi cần chứng minh bổ đề sau đây:

Bổ đề. Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie bất khả quy có cơ sở $\{e_i\}_{i=1}^6$ với $\dim \mathcal{G}^1 = 2$ và $\mathcal{G}^1 = \text{gen}(e_5, e_6) = \mathbb{R}^2$. Khi đó tồn tại trong $\mathcal{G}^1$ một cơ sở mà theo đó các ma trận của các phép biến đổi $ad_{e_1}^1, ad_{e_2}^1, ad_{e_3}^1, ad_{e_4}^1$ có một trong các dạng sau:

- $ad_{e_i}^1 = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$ với $i = \overline{1; 4}$ và $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 \neq 0$.
- $ad_{e_i}^1 = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & 0 \\ 0 & \alpha_{i2} \end{bmatrix}$ với $i = \overline{1; 4}$ và $(\alpha_{11} - \alpha_{12})^2 + (\alpha_{21} - \alpha_{22})^2 + (\alpha_{31} - \alpha_{32})^2 + (\alpha_{41} - \alpha_{42})^2 \neq 0$.
- $ad_{e_i}^1 = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \alpha_i \end{bmatrix}$ với $i = \overline{1; 4}$.

Chứng minh. Trước hết ta lưu ý rằng với mọi $i, j = \overline{1; 4}$ thì $[e_i, e_j] \in \mathcal{G}^1$, nên $[ad_{e_i}^1, ad_{e_j}^1] = 0$. Điều này có nghĩa là các phép biến đổi $ad_{e_1}^1, ad_{e_2}^1, ad_{e_3}^1, ad_{e_4}^1$ giao hoán từng đôi một.

a) Trong các phép biến đổi $ad_{e_1}^1, ad_{e_2}^1, ad_{e_3}^1, ad_{e_4}^1$ có một phép biến đổi, chẳng hạn $ad_{e_1}^1$ có một giá trị riêng phức là $\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$ ($\beta_1 \neq 0$), thì do các phép biến đổi này giao hoán từng đôi một, trong $\mathcal{G}^1\mathcal{G}^1$ phải có một cơ sở để các ma trận của chúng có dạng như ở mục a) của bổ đề.

b) Giả sử $ad_{e_1}^1, ad_{e_2}^1, ad_{e_3}^1, ad_{e_4}^1$ chỉ có những giá trị riêng thực và một trong các phép biến đổi này có hai giá trị riêng phân biệt. Vì các phép biến đổi này đôi một giao hoán, chúng phải có chung một cơ sở riêng. Trong cơ sở này, $ad_{e_1}^1, ad_{e_2}^1, ad_{e_3}^1, ad_{e_4}^1$ có ma trận như ở mục b) của bổ đề.

c) Cuối cùng, giả sử mọi phép biến đổi đang xét đều chỉ có giá trị riêng bội. Vì các phép biến đổi đôi một giao hoán, chúng có thể tam giác hóa được đồng thời. Do đó, ta có thể tìm được một cơ sở mà trong đó các ma trận của $ad_{e_1}^1, ad_{e_2}^1, ad_{e_3}^1, ad_{e_4}^1$ có dạng như trong mục c) của bổ đề.

Bổ đề đã được chứng minh xong.

Dưới đây là chứng minh của Định lý 3.

Chứng minh. Ta sẽ lần lượt xét từng trường hợp tùy theo giá trị của $\dim \mathcal{G}^1 \dim \mathcal{G}^1$.

1. Giả sử $\dim \mathcal{G}^1 = 1$ và $\mathcal{G}^1 = \text{gen}(e_6)$ và

$$[e_i, e_6] = u_i e_6 \text{ với } i = \overline{1; 5},$$

$$[e_i, e_j] = x_{ij} e_6 \text{ với } 1 \leq i < j \leq 5,$$

trong đó các hệ số thực u_i, x_{ij} không đồng thời bằng 0.

1.1) Nếu $u_1 \neq 0$, thì không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $u_1 = 1$. Thực hiện phép biến đổi chính quy sau đây:

$$\bar{e}_i = e_i - u_i e_1 - x_{1i} e_6 \text{ với } i = \overline{2; 5}, \bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_6 = e_6.$$

Dễ thấy rằng

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_6] = \bar{e}_6, [\bar{e}_i, \bar{e}_6] = [\bar{e}_i, \bar{e}_1] = 0 \text{ với } i = \overline{2; 5}.$$

Do đó $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$ với mọi $2 \leq i < j \leq 5$. Từ đó suy ra

$$\mathcal{G} = \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_6) \oplus \text{gen}(\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5).$$

Vậy nên $\mathcal{G}$ không bất khả quy và trường hợp này bị loại.

Tương tự, ta có thể chứng minh rằng nếu một trong các u_i còn lại khác 0 thì $\mathcal{G}$ không bất khả quy. Vì vậy, những trường hợp này cũng bị loại.

1.2) Nếu $u_i = 0$ với $i = \overline{1; 5}$, thì ít nhất một trong các hệ số x_{1i} phải khác 0. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $x_{12} = 1$. Khi đó ta có:

$$[e_i, e_6] = 0 \text{ với } i = \overline{1; 5}, [e_1, e_2] = e_6.$$

$$[e_i, e_j] = x_{ij}e_6 \text{ với } 1 \leq i < j \leq 5 \text{ và } (i; j) \neq (1; 2).$$

Bây giờ ta đặt

$$\bar{e}_3 = e_3 + x_{23}e_1 - x_{13}e_2, \bar{e}_4 = e_4 + x_{24}e_1 - x_{14}e_2, \bar{e}_5 = e_5 + x_{25}e_1 - x_{15}e_2,$$

$$\bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_2 = e_2, \bar{e}_6 = e_6.$$

Dễ dàng chứng minh được đây là phép biến đổi chính quy và

$$[\bar{e}_i, \bar{e}_1] = [\bar{e}_i, \bar{e}_2] = 0 \text{ với } i = 3; 4; 5,$$

$$[\bar{e}_i, \bar{e}_6] = 0 \text{ với } i = \overline{1; 5}, [\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_6,$$

$$[\bar{e}_3, \bar{e}_4] = \tilde{x}_{34}\bar{e}_6, [\bar{e}_4, \bar{e}_5] = \tilde{x}_{45}\bar{e}_6, [\bar{e}_3, \bar{e}_5] = \tilde{x}_{35}\bar{e}_6.$$

1.2.1) Nếu $\tilde{x}_{34} \neq 0$, thì không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $\tilde{x}_{34} = 1$. Khi đó $[\bar{e}_3, \bar{e}_4] = \bar{e}_6$.

Ta đặt

$$\tilde{e}_i = \bar{e}_i \text{ với } i \neq 5, \tilde{e}_5 = \bar{e}_5 + \tilde{x}_{45}\bar{e}_3 - \tilde{x}_{35}\bar{e}_4.$$

Dễ thấy rằng $[\tilde{e}_i, \tilde{e}_5] = 0$, nên

$$\mathcal{G} = \text{gen}(\tilde{e}_5) \oplus \text{gen}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_6),$$

Vậy nên $\mathcal{G}\mathcal{G}$ không bất khả quy và trường hợp này bị loại trừ.

Tương tự, ta có thể chứng minh rằng nếu $\tilde{x}_{45}$ hoặc $\tilde{x}_{35}$ khác 0 thì $\mathcal{G}$ không bất khả quy. Vì vậy, những trường hợp này cũng bị loại.

1.2.2) Nếu $\tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{45} = \tilde{x}_{35} = 0$, thì

$$\mathcal{G} = \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_6) \oplus \text{gen}(\bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5),$$

Vậy nên $\mathcal{G}$ không bất khả quy và trường hợp này bị loại.

2. Giả sử $\dim \mathcal{G}^1 = 2$ và $\mathcal{G}^1 = \text{gen}(e_5, e_6) = \mathbb{R}^2$.

Bây giờ ta lần lượt xét từng khả năng của bổ đề trên.

2.1) Giả sử đối với cơ sở $\{e_5, e_6\}$ của $\mathcal{G}^1$, ta có

$$\text{ad}_{e_i}^1 = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{vmatrix} \text{ với } i = \overline{1; 4} \text{ và } \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 \neq 0.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $\beta_1 \neq 0$. Khi đó $\text{ad}_{e_1}^1$ là phép biến đổi chính quy và tồn tại các hệ số a_i và b_i với $i = 1; 2; 3$ để

$$[e_1, e_i] = a_{i-1}[e_1, e_5] + b_{i-1}[e_1, e_6] \text{ với } i = 2; 3; 4.$$

Thay e_i bởi $e_i - a_{i-1}e_5 - b_{i-1}e_6$ với $i = 2; 3; 4$, ta có thể giả thiết rằng $[e_1, e_i] = 0$ với $i = \overline{1; 4}$. Khi đó từ

$$[e_1, [e_2, e_3]] = [[e_3, e_1], e_2] + [[e_1, e_2], e_3] = 0,$$

và $ad_{e_1}^1$ chính quy suy ra $[e_2, e_3] = 0$.

Tương tự, ta có thể chứng minh $[e_3, e_4] = [e_2, e_4] = 0$.

Bây giờ ta thực hiện các phép biến đổi sau

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{\beta_i}{\beta_1} e_1 \text{ với } i = 2; 3; 4, \bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_5 = e_5, \bar{e}_6 = e_6.$$

Dễ thấy rằng

$$ad_{\bar{e}_1}^1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}, ad_{\bar{e}_i}^1 = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_i & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_i \end{bmatrix} \text{ với } i = 2; 3; 4, \text{ trong đó } \bar{\alpha}_i = \alpha_i - \frac{\beta_i}{\beta_1} \alpha_1,$$

và $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$ với $1 \leq i < j \leq 4$.

Nếu $\bar{\alpha}_2 = 0$ thì $ad_{\bar{e}_2}^1 = 0$ nên ta có

$$\mathcal{G} = gen(\bar{e}_2) \oplus gen(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6).$$

Nếu $\bar{\alpha}_2 \neq 0$ thì với $\tilde{e}_3 = \bar{e}_3 - \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_2} \bar{e}_2$, ta có:

$$ad_{\tilde{e}_3}^1 = 0 \text{ và } [\tilde{e}_3, \bar{e}_1] = [\tilde{e}_3, \bar{e}_2] = [\tilde{e}_3, \bar{e}_4] = 0.$$

Do đó

$$\mathcal{G} = gen(\tilde{e}_3) \oplus gen(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6).$$

Như vậy, trong cả hai trường hợp $\mathcal{G}$ không bất khả quy.

2.2) Giả sử đối với cơ sở $\{e_5, e_6\}$ của $\mathcal{G}^1$ ta có

$$ad_{e_i}^1 = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & 0 \\ 0 & \alpha_{i2} \end{bmatrix} \text{ với } i = \overline{1; 4} \text{ và}$$

$$(\alpha_{11} - \alpha_{12})^2 + (\alpha_{21} - \alpha_{22})^2 + (\alpha_{31} - \alpha_{32})^2 + (\alpha_{41} - \alpha_{42})^2 \neq 0.$$

Do vai trò của $ad_{e_1}^1, ad_{e_2}^1, ad_{e_3}^1, ad_{e_4}^1$ bình đẳng, ta có thể giả thiết rằng $\alpha_{11} \neq \alpha_{12}$. Ta sẽ xem xét các khả năng sau đây:

2.2.1) $\alpha_{11}\alpha_{12} \neq 0$. Trong trường hợp này $ad_{e_1}^1$ chính quy. Với lập luận tương tự như trong 2.1) ta có thể giả thiết rằng

$$[e_i, e_j] = 0 [e_i, e_j] = 0 \text{ với } 1 \leq i < j \leq 4 \text{ và } 1 \leq i < j \leq 4.$$

Giả sử rằng $f = xe_5^* + ye_6^*$ là một dạng tuyến tính bất kỳ của $\mathcal{G}^{1*}$ và $\varphi(x, y)$ là ma trận của dạng B_f trong cơ sở $\{e_i\}_{i=1}^6$. Khi đó ta có

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11}x & \alpha_{12}y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{21}x & \alpha_{22}y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{31}x & \alpha_{32}y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{41}x & \alpha_{42}y \\ -\alpha_{11}x & -\alpha_{21}x & -\alpha_{31}x & -\alpha_{41}x & 0 & 0 \\ -\alpha_{12}y & -\alpha_{22}y & -\alpha_{32}y & -\alpha_{42}y & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do $\text{rank } \varphi(x, 0) \leq 2$ và $\mathcal{G}$ thuộc lớp MD nên $\text{rank } \varphi(x, y) \leq 2, \forall (x, y)$. Từ đây thấy ngay rằng

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}} = \frac{\alpha_{41}}{\alpha_{42}}.$$

Do đó tồn tại các hệ số thực t_i để $ad_{e_i}^1 = t_i ad_{e_1}^1$ với $i = 2; 3; 4$. Bây giờ, bằng cách đặt

$$\bar{e}_i = e_i - t_i e_1 \text{ với } i = 2; 3; 4, \bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_5 = e_5, \bar{e}_6 = e_6,$$

ta có $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$ với $1 \leq i < j \leq 4$ và $ad_{\bar{e}_2}^1 = ad_{\bar{e}_3}^1 = ad_{\bar{e}_4}^1 = 0$, và hệ quả là $\mathcal{G} = \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_5, \bar{e}_6) \oplus \text{gen}(\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$. Vậy nên, $\mathcal{G}$ không bất khả quy và trường hợp 2.2.i) bị loại.

2.2.2) $\alpha_{11} = 0, \alpha_{12} \neq 0$ (trường hợp $\alpha_{11} \neq 0, \alpha_{12} = 0$ được giải quyết tương tự). Thay e_i bởi $e_i - \frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{12}} e_1$ với $i = 2; 3; 4$, ngay từ đầu ta có thể giả sử rằng

$$ad_{e_1}^1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{12} \end{Bmatrix}, ad_{e_i}^1 = \begin{Bmatrix} \alpha_{i1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ với } i = 2; 3; 4.$$

Nếu $\alpha_{21} \neq 0$ (trường hợp $\alpha_{31} \neq 0$ hoặc $\alpha_{41} \neq 0$ được giải quyết tương tự), ta xét cơ sở sau đây

$$\bar{e}_1 = e_1 + e_2, \bar{e}_i = e_i \text{ với } i = \overline{2; 6}.$$

Ta có

$$ad_{\bar{e}_1}^1 = \begin{Bmatrix} \alpha_{21} & 0 \\ 0 & \alpha_{12} \end{Bmatrix}, ad_{\bar{e}_i}^1 = \begin{Bmatrix} \alpha_{i1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ với } i = 2; 3; 4.$$

Vì vậy, chúng ta quay lại trường hợp 2.2.1), trường hợp này bị loại vì $\mathcal{G}$ không bất khả quy.

Bây giờ giả sử $\alpha_{i1} = 0$ với $i = 2, 3, 4$. Khi thay $e_1 e_1$ bởi $\frac{1}{\alpha_{12}} e_1$ (nếu cần), ta có thể giả sử rằng

$$ad_{e_1}^1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, ad_{e_i}^1 = 0 \text{ với } i = 2; 3; 4.$$

Giả sử:

$$[e_1, e_i] = a_i e_5 + b_i e_6 \text{ với } i = 2; 3; 4,$$

$$[e_2, e_3] = a_5 e_5 + b_5 e_6, [e_2, e_4] = a_6 e_5 + b_6 e_6,$$

$$[e_3, e_4] = a_7 e_5 + b_7 e_6,$$

$$f = x e_5^* + y e_6^* f = x e_5^* + y e_6^*.$$

Cho $\varphi(x, y)$ là ma trận của dạng B_f trong cơ sở $\{e_i\}_{i=1}^6$. Khi đó ta có

$$\varphi(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & a_2x + b_2y & a_3x + b_3y & a_4x + b_4y & 0 & y \\ -a_2x - b_2y & 0 & a_5x + b_5y & a_6x + b_6y & 0 & 0 \\ -a_3x - b_3y & -a_5x - b_5y & 0 & a_7x + b_7y & 0 & 0 \\ -a_4x - b_4y & -a_6x - b_6y & -a_7x - b_7y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vì $\text{rank } \varphi(x, 0) \leq 2 \text{rank } \varphi(x, 0) \leq 2$ và $\mathcal{GG}$ thuộc lớp MD nên $\text{rank } \varphi(x, y) \leq 2$ $\text{rank } \varphi(x, y) \leq 2, \forall (x, y) \forall (x, y)$. Do đó định thức

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2x + b_2y & a_3x + b_3y & y \\ -a_2x - b_2y & 0 & a_5x + b_5y & 0 \\ -a_3x - b_3y & -a_5x - b_5y & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall (x, y).$$

Từ đây suy ra $a_5 = b_5 = 0$.

Tương tự, ta có thể chứng minh được $a_6 = b_6 = a_7 = b_7 = 0$. Do đó

$$[e_2, e_3] = [e_2, e_4] = [e_3, e_4] = 0.$$

Bây giờ ta đặt

$$\bar{e}_i = e_i - b_i e_1 \text{ với } i = 2; 3; 4, \bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_5 = e_5, \bar{e}_6 = e_6.$$

Khi đó, $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^6$ là một cơ sở của $\mathcal{G}$ mà với cơ sở này ta có

$$ad_{\bar{e}_1}^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, ad_{\bar{e}_2}^1 = ad_{\bar{e}_3}^1 = ad_{\bar{e}_4}^1 = 0,$$

$$[\bar{e}_3, \bar{e}_2] = [\bar{e}_2, \bar{e}_4] = [\bar{e}_4, \bar{e}_3] = 0,$$

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_i] = a_i \bar{e}_5 \text{ với } i = 2; 3; 4.$$

Nếu $a_2 = 0$ thì $\mathcal{G} = \text{gen}(\bar{e}_2) \oplus \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6)$.

Nếu $a_2 \neq 0$ thì với $e'_3 = \bar{e}_3 - \frac{a_3}{a_2} \bar{e}_2$ ta có $[e'_3, \bar{e}_1] = 0$. Do đó

$$\mathcal{G} = \text{gen}(e'_3) \oplus \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6).$$

Điều này có nghĩa là $\mathcal{G}$ không bất khả quy. Trường hợp này bị loại.

2.3) Giả sử đối với cơ sở $\{e_5, e_6\}$ của $\mathcal{G}^1$ ta có

$$ad_{e_i}^1 = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \alpha_i \end{vmatrix} \text{ với } i = \overline{1; 4}.$$

Ta sẽ xem xét các khả năng sau đây:

2.3.1) $\alpha_1 \neq 0$ (trường hợp một trong các α_i còn lại khác 0 được giải quyết tương tự).

Khi đó $ad_{e_1}^1$ chính quy. Với lập luận tương tự như trong 2.1) ta có thể giả sử rằng

$$[e_i, e_j] = 0 \text{ với } 1 \leq i < j \leq 4.$$

Đặt

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} e_1 \text{ với } i = 2; 3; 4, \bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_5 = e_5, \bar{e}_6 = e_6,$$

ta nhận được

$$ad_{\bar{e}_1}^1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{vmatrix}, ad_{\bar{e}_i}^1 = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\beta}_i \\ 0 & 0 \end{vmatrix} (\tilde{\beta}_i = \beta_i - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \alpha_i) \text{ với } i = 2; 3; 4.$$

Nếu $\tilde{\beta}_2 = 0$ thì $\mathcal{G} = \text{gen}(\bar{e}_2) \oplus \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6)$.

Nếu $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ thì với $e'_3 = \bar{e}_3 - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_2} \bar{e}_2$ ta có $\mathcal{G} = \text{gen}(e'_3) \oplus \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6)$.

Điều này có nghĩa là $\mathcal{G}$ không bất khả quy. Trường hợp này bị loại.

2.3.2) $\alpha_i = 0$ với $i = \overline{1; 4}$. Trường hợp này lại được tách thành các trường hợp nhỏ sau đây.

2.3.2.i) $\beta_1 \neq 0$ (trường hợp một trong các β_i còn lại khác 0 được giải quyết tương tự). Khi thay e_i bởi $e_i - \frac{\beta_i}{\beta_1} e_1$ với $i = 2; 3; 4$ và e_1 bởi $\frac{1}{\beta_1} e_1$ ta có thể giả sử rằng

$$ad_{e_1}^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, ad_{e_i}^1 = 0 \text{ với } i = 2; 3; 4,$$

$$[e_1, e_i] = a_i e_5 + b_i e_6 \text{ với } i = 2; 3; 4,$$

$$[e_2, e_3] = a_5 e_5 + b_5 e_6, [e_2, e_4] = a_6 e_5 + b_6 e_6, [e_3, e_4] = a_7 e_5 + b_7 e_6.$$

Cho $f = xe_5^* + ye_6^*$ là một dạng tuyến tính bất kỳ của của $\mathcal{G}^{1*}$ và $\varphi(x, y)$ là ma trận của dạng B_f trong cơ sở $\{e_i\}_{i=1}^6$. Khi đó ta có

$$\varphi(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & a_2x + b_2y & a_3x + b_3y & a_4x + b_4y & 0 & y \\ -a_2x - b_2y & 0 & a_5x + b_5y & a_6x + b_6y & 0 & 0 \\ -a_3x - b_3y & -a_5x - b_5y & 0 & a_7x + b_7y & 0 & 0 \\ -a_4x - b_4y & -a_6x - b_6y & -a_7x - b_7y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Do $\text{rank } \varphi(x, 0) \leq 2$ và $\mathcal{G}$ thuộc lớp MD, suy ra $\text{rank } \varphi(x, y) \leq 2, \forall (x, y)$. Do đó định thức

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2x + b_2y & a_3x + b_3y & y \\ -a_2x - b_2y & 0 & a_5x + b_5y & 0 \\ -a_3x - b_3y & -a_5x - b_5y & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall (x, y).$$

Từ đây suy ra $a_5 = b_5 = 0$.

Tương tự, ta có thể chứng minh được $a_6 = b_6 = a_7 = b_7 = 0$. Do đó

$$[e_2, e_3] = [e_2, e_4] = [e_3, e_4] = 0.$$

Bây giờ ta đặt

$$\bar{e}_i = e_i - a_i e_6 \text{ với } i = 2; 3; 4, \bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_5 = e_5, \bar{e}_6 = e_6.$$

Khi đó, $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^6$ là một cơ sở của $\mathcal{GG}$ mà với cơ sở này ta có

$$\begin{aligned} ad_{\bar{e}_1}^1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, ad_{\bar{e}_2}^1 = ad_{\bar{e}_3}^1 = ad_{\bar{e}_4}^1 = 0, \\ [\bar{e}_3, \bar{e}_2] &= [\bar{e}_2, \bar{e}_4] = [\bar{e}_4, \bar{e}_3] = 0, \\ [\bar{e}_1, \bar{e}_i] &= b_i \bar{e}_6 \text{ với } i = 2; 3; 4. \end{aligned}$$

Nếu $b_2 = 0$ thì $\mathcal{G} = \text{gen}(\bar{e}_2) \oplus \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6)$.

Nếu $b_2 \neq 0$ thì với $e'_3 = \bar{e}_3 - \frac{b_3}{b_2} \bar{e}_2$ ta có $[e'_3, \bar{e}_1] = 0$. Do đó

$$\mathcal{G} = \text{gen}(e'_3) \oplus \text{gen}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6).$$

Điều này có nghĩa là $\mathcal{G}$ không bất khả quy. Trường hợp này bị loại.

2.3.2.ii) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$. Khi đó $ad_{e_i}^1 = 0$ với $i = 1; 2; 3; 4$. Bởi vì $\mathcal{G}^1$ sinh bởi các vector $[e_i, e_j]$ với $1 \leq i < j \leq 4$, nên phải có hai trong các vector này độc lập tuyến tính. Ta lần lượt xét các khả năng sau đây.

2.3.2.ii.a) Giả sử $[e_1, e_2]$ và $[e_1, e_3]$ độc lập tuyến tính (các trường hợp $[e_t, e_i]$ và $[e_t, e_j]$ độc lập tuyến tính khác được giải quyết tương tự). Khi đó tồn tại các số thực a, b, c, d để

$$[e_2, e_3] = a[e_1, e_2] + b[e_1, e_3], [e_1, e_4] = c[e_1, e_2] + d[e_1, e_3].$$

Xét phép biến đổi

$$\bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_2 = e_2 - be_1, \bar{e}_3 = e_3 + ae_1, \bar{e}_4 = e_4 - ce_2 - de_3, \bar{e}_5 = e_5, \bar{e}_6 = e_6.$$

Khi đó

$$[\bar{e}_2, \bar{e}_3] = [\bar{e}_1, \bar{e}_4] = 0, [\bar{e}_1, \bar{e}_2] = [e_1, e_2], [\bar{e}_1, \bar{e}_3] = [e_1, e_3], ad_{\bar{e}_2}^1 = ad_{\bar{e}_3}^1 = ad_{\bar{e}_4}^1 = 0.$$

Ta đặt

$$\tilde{e}_i = \bar{e}_i \text{ với } i = \overline{1; 4}, \tilde{e}_5 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2], \tilde{e}_6 = [\bar{e}_1, \bar{e}_3].$$

Hiển nhiên $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^6$ là một cơ sở của $\mathcal{G}$ và $\mathcal{G}^1 = \text{gen}(\tilde{e}_5, \tilde{e}_6)$. Ngoài ra

$$ad_{\tilde{e}_i}^1 = 0 \text{ với } i = \overline{1; 4}, [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = [\tilde{e}_5, \tilde{e}_6] = 0, [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_5, [\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_6.$$

Giả sử $[\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = a_1 \tilde{e}_5 + b_1 \tilde{e}_6, [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = a_2 \tilde{e}_5 + b_2 \tilde{e}_6$.

Nếu $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, thì

$$\mathcal{G} = \text{gen}(\tilde{e}_4) \oplus \text{gen}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_5, \tilde{e}_6).$$

Điều này có nghĩa là $\mathcal{G}$ không bất khả quy, nên trường hợp này bị loại.

Giả sử trong dãy a_1, a_2, b_1, b_2 có ít nhất một số khác 0. Cho $f = xe_5^* + ye_6^*$ là một dạng tuyến tính bất kỳ của của $\mathcal{G}^{1*}$ và $\varphi(x, y)$ là ma trận của dạng B_f trong cơ sở $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^6$. Khi đó ta có

$$\varphi(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & a_2x + b_2y & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & a_1x + b_1y & 0 & 0 \\ 0 & -a_2x - b_2y & -a_1x - b_1y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ta xét hai khả năng:

Nếu chiều cực đại của K-quỹ đạo trong $\mathcal{G}^*$ bằng 2, thì $\text{rank } \varphi(x, y) \leq 2, \forall (x, y)$. Từ đây suy ra

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & a_2x + b_2y \\ -y & 0 & 0 & a_1x + b_1y \\ 0 & -a_2x - b_2y & -a_1x - b_1y & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall (x, y),$$

dẫn đến

$$x(a_1x + b_1y) - y(a_2x + b_2y) = 0, \forall (x, y).$$

Từ đây suy ra $a_1 = b_2 = 0, a_2 = b_1$. Nhưng do trong dãy a_1, a_2, b_1, b_2 có ít nhất một số khác 0, nên $a_2 = b_1 \neq 0$. Vậy nên

$$[\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = a_2\tilde{e}_6, [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = a_2\tilde{e}_5.$$

Khi thay $\tilde{e}_1$ bởi $\tilde{e}_1 + \frac{1}{a_2}\tilde{e}_4$, ta có thể giả sử rằng

$$ad_{\tilde{e}_i}^1 = 0 \text{ với } i = \overline{1; 4}, [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = [\tilde{e}_5, \tilde{e}_6] = 0,$$

$$[\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = a_2\tilde{e}_5, [\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = a_2\tilde{e}_6.$$

Do đó $\mathcal{G} = \text{gen}(\tilde{e}_1) \oplus \text{gen}(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5, \tilde{e}_6)$.

Điều này có nghĩa là $\mathcal{G}$ không bất khả quy, nên khả năng này bị loại.

Nếu chiều cực đại của K-quỹ đạo trong $\mathcal{G}^*$ bằng 4, thì hiển nhiên $\mathcal{G}$ thuộc lớp MD khi và chỉ khi

$$x(a_1x + b_1y) - y(a_2x + b_2y) \neq 0, \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Dễ thấy rằng bất đẳng thức này tương đương với $(b_1 - a_2)^2 + 4a_1b_2 < 0$. Từ đây suy ra $a_1b_2 \neq 0$.

Khi thay $\tilde{e}_4$ bởi $\frac{1}{a_1}\tilde{e}_4 + \frac{b_1}{a_1}\tilde{e}_1$ ta có thể giả sử rằng $a_1 = 1, b_1 = 0$ và bất đẳng thức trên được viết lại là $a_2^2 + 4b_2 < 0$. Vậy nên cơ sở $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^6$ của $\mathcal{G}$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} ad_{\tilde{e}_i}^1 &= 0 \text{ với } i = \overline{1;4}, [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = [\tilde{e}_5, \tilde{e}_6] = 0, \\ [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] &= \tilde{e}_5, [\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_6, [\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = \tilde{e}_5, \\ [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] &= a_2\tilde{e}_5 + b_2\tilde{e}_6 \text{ với } a_2^2 + 4b_2 < 0. \end{aligned}$$

Do đó $\mathcal{G}$ đẳng cấu với đại số Lie đã nêu trong nội dung của Định lý 3.

2.3.2.ii.b) Giả sử mọi cặp $[e_t, e_i]$ và $[e_t, e_j]$ phụ thuộc tuyến tính. Do $\mathcal{G}^1$ sinh bởi các vector $[e_i, e_j]$ với $1 \leq i < j \leq 4$, và $\dim \mathcal{G}^1 = 2$, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $[e_1, e_2]$ và $[e_3, e_4]$ độc lập tuyến tính.

Nếu $[e_2, e_3] \neq 0$ thì do mỗi cặp sau phụ thuộc tuyến tính: $[e_1, e_2]$ và $[e_2, e_3]$; $[e_2, e_3]$ và $[e_3, e_4]$, phải tồn tại các số a và b để: $[e_2, e_3] = a[e_1, e_2]$; $[e_3, e_4] = b[e_2, e_3]$. Khi đó $[e_3, e_4] = ab[e_1, e_2]$, trái với giả thiết $[e_1, e_2]$ và $[e_3, e_4]$ độc lập tuyến tính ở trên. Vì vậy $[e_2, e_3] = 0$.

Chúng minh tương tự trên, ta cũng có $[e_2, e_4] = [e_1, e_3] = [e_1, e_4] = 0$.

Ta đặt

$$\tilde{e}_i = e_i \text{ với } i = \overline{1;4}, \tilde{e}_5 = [e_1, e_2], \tilde{e}_6 = [e_3, e_4].$$

Rõ ràng $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^6$ là một cơ sở của $\mathcal{G}$ và

$$\begin{aligned} ad_{\tilde{e}_i}^1 &= 0 \text{ với } i = \overline{1;4}, \\ [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] &= [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = 0, \\ [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] &= \tilde{e}_5, [\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = \tilde{e}_6. \end{aligned}$$

Do đó $\mathcal{G} = \text{gen}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_5) \oplus \text{gen}(\tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_6)$. Điều này có nghĩa là $\mathcal{G}$ không bất khả quy, nên khả năng này bị loại.

Định lý 3 đã được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

- Diep, D.N. (1974). The structure of the C^* -algebra of the group of affine transformation on the line, *Functional Analysis and Application*, 9, 63-64.
- Kirilov, A. A. (1976). Elements of the Theory of representations, Springer-verlag.
- Son, V. M, Viet, H. H. (1984). Sur la structure des C^* -algèbres d'une classe de groupes de Lie, *J. Operator Theory*, 11, 77-90.

- Tra, D. V. (1984), On the Lie groups of the class MD with rather small dimensions, *unpublished paper (presented at the XII Scientific Conference of the Mathematical Institute.*
- Tra, D. V. (1993), On a class of resolvable Lie algebras, *Acta Math. Vietnam*, 18, 19-60.
- Viet, H. H. (1986). Sur la structure des C^* -algèbres d'une classe de groupes de Lie résolubles de dimension 3, *Acta Math. Vietnam*, 11, 86-91.
- Vu, L. A. (1990). On the foliations formed by the Generic K-orbits of the MD4-Groups, *Acta Math. Vietnam*, 15, 39-55.