Tích chập suy rộng đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine, Mellin ngược và một ứng dụng

Trần An Hải[a*], Nguyễn Văn An[b]

Tóm tắt:

Trong bài báo này chúng tôi xây dựng và nghiên cứu tích chập suy rộng với hàm trọng đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Mellin ngược. Chúng tôi sử dụng tích chập mới này để giải một hệ phương trình tích phân.

Từ khóa: *phép biến đổi tích phân, tích chập, đẳng thức nhân tử hóa, Fourier cosine, Mellin*

---

[a] Học viện Ngân hàng; 12 Chùa Bộc, phường Quang Trung, quận Đống Đa, Hà Nội
e-mail: haita@hvnh.edu.vn
[b] Học viện Ngân hàng; 12 Chùa Bộc, phường Quang Trung, quận Đống Đa, Hà Nội.
e-mail: annv@hvnh.edu.vn
[*] Tác giả chịu trách nhiệm chính.

Tạp chí Khoa học Đại học Đông Á, Tập 3, Số 1(9), Tháng 3.2024, tr. 2-13

ISSN: 2815 - 5807

Generalized Convolution for Fourier cosine, Inverse Mellin Integral Transforms and an Application

Tran An Hai[a*], Nguyen Van An[b]

Abstract:

In this article, we construct and study generalized convolution with weight functions for Fourier cosine and inverse Mellin integral transforms. We use this new convolution to solve a system of integral equations.

Key words: *integral transform, convolution, factorization equality, Fourier cosine, Mellin*

Received: 2.4.2023; Accepted: 15.9.2023; Published: 06/11/2023

DOI: 10.59907/daujs.3.1.2024.253

[a] Banking Academy of Vietnam; 12 Chua Boc Street., Dong Da District, Hanoi, Vietnam.
e-mail: haita@hvnh.edu.vn
[b] Banking Academy of Vietnam; 12 Chua Boc Street, Dong Da District, Hanoi, Vietnam.
e-mail: annv@hvnh.edu.vn
[*] Corresponding Author.

Phần giới thiệu

Cho X, Y là các tập con của $\mathbb{R}$ và $U(X)$, $U(Y)$ lần lượt là không gian các hàm xác định trên X và Y. Cho $K(x,y)$ là hàm hai biến xác định trên $X \times Y$. Phép biến đổi tích phân với nhân $K(x,y)$ là ánh xạ $\mathcal{T}: U(X) \to U(Y)$ xác định như sau:

$$(\mathcal{T}f)(y) = \int_X K(x,y)f(x)dx.$$

Có nhiều loại phép biến đổi tích phân. Mỗi loại tương ứng với một lựa chọn nhân K khác nhau. Một số phép biến đổi tích phân có nghịch đảo (với nhân ký hiệu là $K^{-1}(y,x)$), nếu tồn tại phép biến đổi ngược:

$$f(x) = \int_Y K^{-1}(y,x)(\mathcal{T}f)(y)dy\,, Y \subset \mathbb{R}.$$

Nhiều phép biến đổi tích phân cổ điển đã được nghiên cứu và cho các ứng dụng quan trọng, như phép biến đổi Fourier, phép biến đổi Laplace. Một trong những ứng dụng thú vị của các phép biến đổi tích phân là giải hệ phương trình tích phân. Chúng biến đổi một hệ phi tuyến thành một hệ đại số tuyến tính để có thể giải đúng hệ này và cho nghiệm dưới dạng đóng.

Mục đích chính của chúng tôi trong bài báo này là xây dựng và nghiên cứu tích chập suy rộng với hàm trọng đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Mellin ngược. Chúng tôi sử dụng tích chập mới để giải một hệ phương trình tích phân.

Kiến thức chuẩn bị

Trong bài báo này, với X là một tập con của $\mathbb{R}$ và $\gamma(x)$ là một hàm xác định trên X, thì $L(\gamma(x), X)$ là kí hiệu không gian các hàm $f(x)$ sao cho tích phân Lebesgue $\int_X \gamma(x)|f(x)|dx$ tồn tại và hữu hạn. Ta dùng kí hiệu $L(X)$ thay cho $L(1, X)$.

Dưới đây, chúng tôi nêu ra một số phép biến đổi tích phân cổ điển quen biết mà trong bài báo này cần dùng đến.

Phép biến đổi Mellin ngược $\mathcal{M}^{-1}$ (Bateman và Erdélyi, 1954):

$$(\mathcal{M}^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(u)\, x^{-u} du, x > 0,$$

trong đó $c = \mathrm{Re}u$ và $g(\mathrm{Im}u) = f(u)$ là hàm thuộc $L(\mathbb{R})$.

Phép biến đổi Fourier sine $\mathcal{F}_S$ (Churchill, 1941):

$$(\mathcal{F}_S f)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)\, dx\,, y > 0,$$

trong đó f là hàm thuộc $L(\mathbb{R}_+)$.

Phép biến đổi Fourier cosine $\mathcal{F}_C$ (Churchill, 1941):

$$(\mathcal{F}_C f)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy)\, dx\,, y > 0,$$

trong đó f là hàm thuộc $L(\mathbb{R}_+)$.

Từ đầu thế kỷ 20, tích chập đối với các phép biến đổi tích phân đã được nghiên cứu. Tích chập đã được ứng dụng để giải phương trình tích phân, tính tích phân, lấy tổng chuỗi.

Năm 1952, S. N. Sneddon đưa ra tích chập của các hàm f và g đối với phép biến đổi Fourier cosine:

$$\left(f \underset{\mathcal{F}_C}{*} g\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(u)\big(g(|x-u|) + g(x+u)\big) du\,, x > 0,$$

trong đó f và g là hàm thuộc $L(\mathbb{R}_+)$.

Tích chập này thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$\mathcal{F}_C\left(f \underset{\mathcal{F}_C}{*} g\right)(y) = (\mathcal{F}_C f)(y) \cdot (\mathcal{F}_C g)(y), \forall y > 0. \tag{1}$$

Năm 1998, V. A. Kakichev và Nguyễn Xuân Thảo đưa ra một phương pháp kiến thiết tích chập suy rộng của hai hàm f và g với hàm trọng $\gamma(y)$ đối với ba phép biến đổi tích phân bất kỳ K_1, K_2, K_3 (Kakichev, V. A., Nguyen Xuan Thao, 1998), mà thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$K_1(f * g)(y) = \gamma(y) \cdot (K_2 f)(y) \cdot (K_3 g)(y).$$

Trong những năm gần đây, một số tích chập suy rộng mới đã được công bố, chẳng hạn như: tích chập suy rộng đối với các phép biến đổi tích phân Stieltjes, Hilbert và Fourier cosine - sine (Nguyen Xuan Thao, Kakichev, V. A, Vu Kim Tuan, 1998), tích chập suy rộng với hàm trọng đối với các phép biến đổi tích phân Fourier sine và Fourier cosine (Nguyen Xuan Thao, Vu Kim Tuan, Nguyen Minh Khoa, 2004), tích chập suy rộng đối với H - phép biến đổi (Kakichev, V. A., Nguyen Xuan Thao, 2000), tích chập suy rộng đối với I - phép biến đổi (Nguyen Xuan Thao and Trinh Tuan, 2003), tích chập suy rộng với hàm trọng đối với các phép biến đổi tích phân Kontorovich - Lebedev, Fourier sine và Fourier cosine (Nguyen Xuan Thao, Trinh Tuan, 2005)...

Ví dụ, một tích chập suy rộng của hai hàm f và g đối với phép biến đổi Fourier cosine với hàm trọng $\eta(y) = \cos y$ đã được nghiên cứu (Nguyen Xuan Thao, Nguyen Minh Khoa, 2004) là:

$$\left(f \overset{\eta}{*} g\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\big(g(x+1+t) + g(|x+1-t|) + g(|x-1+t|) + g(|x-1-t|)\big) dt, x > 0.$$

trong đó f và g là hàm thuộc $L(\mathbb{R}_+)$.

Tích chập này thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$\mathcal{F}_C\left(f \overset{\eta}{*} g\right)(y) = \cos y \cdot (\mathcal{F}_C f)(y) \cdot (\mathcal{F}_C g)(y), \forall y > 0. \tag{2}$$

Kết quả chính

Trong phần này chúng tôi xây dựng và nghiên cứu tích chập suy rộng với hàm trọng đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Mellin ngược.

Ký hiệu

$$\begin{aligned}\theta(x,u,v) = \frac{1}{2\pi^2 i}\Gamma(-u)\Big((1+(x-v)^2)^{\frac{u}{2}}\cos(u \\ \cdot \arctan(x-v)) + (1+(x+v)^2)^{\frac{u}{2}}\cos(u\cdot\arctan(x+v))\Big),\end{aligned} \tag{3}$$

trong đó $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, với $\mathrm{Re}z > 0$, là hàm Gamma.

Định nghĩa. *Tích chập suy rộng của hai hàm f và g với hàm trọng $\gamma(y) = e^{-y}y^{-1}$ đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Mellin ngược được xác định như sau:*

$$\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_0^{+\infty} \theta(x,u,v)f(u)g(v)dudv, \qquad x > 0, \tag{4}$$

trong đó u là biến số phức với $c = \mathrm{Re}u < -2, t = \mathrm{Im}u$.

Định lý 1. *Nếu $f \in L\left(\mathrm{ch}\frac{\pi \mathrm{Im}u}{2}, \mathbb{R}\right)$ và $g \in L(\mathbb{R}_+)$, thì tích chập $\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)$ thuộc $L(\mathbb{R}_+)$ và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa*

$$\mathcal{F}_C\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(y) = \gamma(y)\cdot(\mathcal{M}^{-1}f)(y)\cdot(\mathcal{F}_C g)(y), \forall y > 0. \tag{5}$$

Chứng minh. Với hàm Gamma $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, trong đó $\mathrm{Re}z > 0$, ta dễ chứng minh được các bất đẳng thức sau

$$|\Gamma(z)| \le \Gamma(\mathrm{Re}z), \qquad \forall z \in \mathbb{C} \text{ với } \mathrm{Re}z > 0, \tag{6}$$

$$|\cos z| \le \mathrm{ch}(\mathrm{Im}z), \forall z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Từ các bất đẳng thức (6) và (7) suy ra rằng $\forall u \in \mathbb{C}$ với $c = \mathrm{Re}u < -2$ thì

$$\begin{aligned}|\theta(x,u,v)| &\le \frac{1}{2\pi^2}|\Gamma(-u)|\Big(\left|(1+(x-v)^2)^{\frac{u}{2}}\right||\cos(u\cdot\arctan(x-v))| + \Big|(1 \\ &\quad + (x+v)^2)^{\frac{u}{2}}\Big|\,|\cos(u\cdot\arctan(x+v))|\Big) \\ &\le \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\Big(\left|(1+(x-v)^2)^{\frac{u}{2}}\right|\mathrm{ch}(u\cdot\arctan(x \\ &\quad - v)) + \left|(1+(x+v)^2)^{\frac{u}{2}}\right|\mathrm{ch}(u\cdot\arctan(x+v))\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

Do $c < -2$ nên

$$\left|(1+(x\pm v)^2)^{\frac{u}{2}}\right| \le 1. \tag{9}$$

Vì $|\arctan(x \pm v)| \leq \frac{\pi}{2}$ nên

$$\operatorname{ch}(u \cdot \arctan(x \pm v)) \leq \operatorname{ch}\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}. \tag{10}$$

Từ (8), (9), (10) suy ra

$$|\theta(x,u,v)| \leq \frac{1}{\pi^2}|\Gamma(-\mathrm{c})| \operatorname{ch}\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}. \tag{11}$$

Do (11), với $c < -2$ thì

$$\left|\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(x)\right| = \left|\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_{0}^{+\infty} \theta(x,u,v) f(u) g(v) du dv\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} |\theta(x,u,v)||f(u)||g(v)| dt dv$$

$$\leq \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \operatorname{ch}\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}|f(u)||g(v)| dt dv < +\infty.$$

Ta có

$$\int_{0}^{+\infty} \left|\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(x)\right| dx$$

$$\leq \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} |\theta(x,u,v)||f(u)||g(v)| dx dt dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} |\theta(x,u,v)| dx\right)|f(u)||g(v)| dt dv$$

$$\leq \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} \operatorname{ch}\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}\left\{(1+(x-v)^2)^{\frac{c}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+ (1+(x+v)^2)^{\frac{c}{2}}\right\} dx\right)|f(u)||g(v)| dt dv$$

$$\leq \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} \operatorname{ch}\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}\{(1+(x-v)^2)^{-1} + (1+(x\right.$$

$$\left. + v)^2)^{-1}\} dx\right)|f(u)||g(v)| dt dv$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \operatorname{ch}\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}(\arctan(x-v)\,|_0^{+\infty} + \arctan(x$$

$$+ v)\ |_0^{+\infty})|f(u)||g(v)|dtdv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Gamma(-c)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{ch}\frac{\pi \mathrm{Im}u}{2}|f(u)||g(v)|dtdv < +\infty.$$

Vậy nên $f \overset{\gamma}{*} g$ thuộc $L(\mathbb{R}_+)$.

Để chứng minh tích chập (4) thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa (5), trước hết ta chỉ ra rằng: Với $u \in \mathbb{C}$ và $v \in \mathbb{R}_+$ là các hằng số thì $\theta(x,u,v)$ thuộc $L(\mathbb{R}_+)$. Thật vậy,

$$\int_0^{+\infty} |\theta(x,u,v)|dx$$
$$\leq \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\int_0^{+\infty} \left(\left|(1+(x-v)^2)^{\frac{u}{2}}\right| |\cos(u\cdot \arctan(x-v))| + \left|(1\right.\right.$$
$$\left.\left. + (x+v)^2)^{\frac{u}{2}}\right| |\cos(u\cdot \arctan(x+v))|\right) dx$$
$$\leq \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\int_0^{+\infty} \Big((1+(x-v)^2)^{-1}\mathrm{ch}(t\cdot \arctan(x$$
$$- v)) + \left|(1+(x+v)^2)^{\frac{-1}{2}}\right| \mathrm{ch}(t\cdot \arctan(x+v))\Big) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(t\cdot \arctan(x-v))d(\arctan(x-v))\right.$$
$$\left. + \int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(t\cdot \arctan(x+v))d(\arctan(x+v))\right).$$

Do đó nếu $t \neq 0$ thì

$$\int_0^{+\infty} |\theta(x,u,v)|dx \leq \frac{1}{2\pi^2 t}\Gamma(-c)(\mathrm{sh}(t\cdot \arctan(x-v))|_0^{+\infty} + \mathrm{sh}(t\cdot \arctan(x+v))|_0^{+\infty})$$
$$= \frac{1}{2\pi t}\Gamma(-c)\mathrm{sh}\frac{\pi t}{2}.$$

Nếu $t = 0$ thì

$$\int_0^{+\infty} |\theta(x,u,v)|dx \leq \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(-c)\left(\int_0^{+\infty} d(\arctan(x-v)) + \int_0^{+\infty} d(\arctan(x+v))\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Gamma(-c).$$

Vậy nên

$$\int_0^{+\infty} |\theta(x,u,v)|dx < +\infty.$$

Mặt khác, theo công thức số 27 trong Bateman và Erdélyi (1954, 279), ta có

$$\begin{aligned}
&\left(F_C\left(\frac{1}{\pi^2 i} e^{-y} y^{-u-1}\cos(vy)\right)\right)(x)\\
&= \frac{1}{\pi^2 i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{-u-1}\cos(vy)\cos(xy)\,dy\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\pi^2 i}\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{-u-1}\big(\cos\big(y(x-v)\big)+\cos\big(y(x+v)\big)\big)dy\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta(x,u,v).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\big(\mathcal{F}_C\big(\theta(x,u,v)\big)\big)(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi^2 i}e^{-y}y^{-u-1}\cos(vy).$$

Vậy nên, ta có

$$\begin{aligned}
\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}f)(y)(\mathcal{F}_C g)(y) &= e^{-y}y^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(u)y^{-u}du\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(v)\cos(vy)\,dv\\
&= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi^2 i}e^{-y}y^{-u-1}\cos(vy)\,f(u)g(v)dudv\\
&= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\theta(x,u,v)\cos(xy)\,dx\right)f(u)g(v)dudv\\
&= \mathcal{F}_C\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(y).
\end{aligned}$$

Định lý 1 đã được chứng minh.

Định lý 2. *Nếu* $f \in L\left(ch\frac{\pi Imu}{2},\mathbb{R}\right)$ *và* $g \in L(\mathbb{R}_+)$ *thì*

$$\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi^3}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(-u)f(u)\left(g(v) \underset{\mathcal{F}_C}{*} (1+v^2)^{\frac{u}{2}}\cos(u\cdot\arctan v)\right)(x)du,$$

với mọi $x > 0$.

Chứng minh. Từ (1) và (4) suy ra

$$\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi^3}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(-u)f(u)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} g(v)\left((1+|x-v|^2)^{\frac{u}{2}}\cos(u\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot \arctan|x-v|) + (1+|x+v|^2)^{\frac{u}{2}}\cos(u\cdot\arctan|x+v|)\right)dv\right)du$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2\pi^3}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(-u)f(u)\left(g(v) \underset{\mathcal{F}_C}{*} (1+v^2)^{\frac{u}{2}}\cos(u\right.$$

$$\left.\cdot\arctan v)\right)(x)du, \forall x > 0.$$

Không khó để chỉ ra rằng tích chập suy rộng (4) không giao hoán và không kết hợp. Tuy nhiên, ta có

Định lý 3. *Giả sử* $f \in L\left(\mathrm{ch}\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}, \mathbb{R}\right)$ (Reu < -2).

a) *Nếu* $h \in L(\mathbb{R}_+)$ *thì các đẳng thức sau đây đúng*

$$f \overset{\gamma}{*} \left(g \underset{\mathcal{F}_C}{*} h\right) = \left(f \overset{\gamma}{*} g\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} h,$$

$$f \overset{\gamma}{*} \left(g \overset{\eta}{*} h\right) = \left(f \overset{\gamma}{*} g\right) \overset{\eta}{*} h.$$

b) *Nếu* $g \in L\left(ch\frac{\pi \mathrm{Im} u}{2}, \mathbb{R}\right)$, *thì đẳng thức sau đây đúng*

$$f \overset{\gamma}{*} \left(g \overset{\gamma}{*} h\right) = g \overset{\gamma}{*} \left(f \overset{\gamma}{*} h\right).$$

Chứng minh. Ta chứng minh đẳng thức đầu tiên trong *a*). Từ tích chập (1) và Định lí 1 suy ra

$$\mathcal{F}_C\left(f \overset{\gamma}{*} \left(g \underset{\mathcal{F}_C}{*} h\right)\right)(y) = \gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}f)(y)\mathcal{F}_C\left(g \underset{\mathcal{F}_C}{*} h\right)(y)$$

$$= \gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}f)(y)(\mathcal{F}_C g)(y)(\mathcal{F}_C h)(y) = \mathcal{F}_C\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(y)(\mathcal{F}_C h)(y)$$

$$= \mathcal{F}_C\left(\left(f \overset{\gamma}{*} g\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} h\right)(y), \forall y > 0.$$

Do đó $f \overset{\gamma}{*} \left(g \underset{\mathcal{F}_C}{*} h\right) = \left(f \overset{\gamma}{*} g\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} h$.

Bằng cách tương tự, ta có thể chứng minh được các đẳng thức còn lại.

Sau đây chúng tôi áp dụng tích chập mới để giải hệ phương trình tích phân

$$\begin{cases} f(x) + \lambda_1 \displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int_0^{+\infty} \theta(x,u,v)\varphi(u)g(v)dudv + \lambda_2 \int_0^{+\infty} \theta_1(x,u)g(u)du = h(x) \\ \lambda_3 \displaystyle\int_0^{+\infty} \theta_2(x,u)f(u)du + g(x) = k(x) \end{cases} \quad (12)$$

trong đó $x > 0, c < -2;\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các hằng số phức; $\theta(x, u, v)$ được xác định ở (3),

$$\theta_1(x,u) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Big(\xi(x+1+t) + \xi(|x+1-t|) + \xi(|x-1+t|) + \xi\left(\Big|x-1-\right.$$

$$\theta_2(x,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\psi(|x-u|) + \psi(x+u)\big)t\Big|\Big)\Big),$$

φ, ψ, ξ, h, k là những hàm cho trước và f, g là những ẩn hàm.

Định lý 4. *Giả sử*

$$\varphi \in L\left(ch\frac{\pi Imu}{2}, \mathbb{R}\right) \text{ và } \psi, \xi, h, k \in L(\mathbb{R}_+),$$

$$l(x) = \lambda_1\left(\varphi \overset{\gamma}{*} \psi\right)(x) + \lambda_2\left(\xi \overset{\eta}{*} \psi\right)(x).$$

Khi đó, với điều kiện $1 - \lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y) \neq 0, \forall y > 0$, *hệ* (12) *có nghiệm là*

$$f = h + \left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) - \lambda_1\left(\varphi \overset{\gamma}{*} k\right) - \lambda_1\left(\varphi \overset{\gamma}{*}\left(k \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)\right) - \lambda_2\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right) - \lambda_2\left(\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) \in L(\mathbb{R}_+),$$

$$g = k + \left(k \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) - \lambda_3\left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} \psi\right) - \lambda_3\left(\left(h *_{\mathcal{F}_C} \psi\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) \in L(\mathbb{R}_+),$$

với $q \in L(\mathbb{R}_+)$ *thỏa mãn*

$$(\mathcal{F}_C q)(y) = \frac{\lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y)}{1 - \lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y)}.$$

Chứng minh. Tác động $\mathcal{F}_C$ vào các phương trình trong hệ (12), sau đó sử dụng các đẳng thức nhân tử hóa (1), (2), (5), ta nhận được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} (\mathcal{F}_C f)(y) + \lambda_1\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(y)(\mathcal{F}_C g)(y) + \lambda_2 \cos y\,(\mathcal{F}_C\xi)(y)(\mathcal{F}_C g)(y) = (\mathcal{F}_C h)(y) \\ \lambda_3(\mathcal{F}_C f)(y)(\mathcal{F}_C\psi)(y) + (\mathcal{F}_C g)(y) = (\mathcal{F}_C k)(y) \end{cases}$$

Các định thức của hệ này là

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(y) + \lambda_2\cos y\,(\mathcal{F}_C\xi)(y) \\ \lambda_3(\mathcal{F}_C\psi)(y) & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - \lambda_3\left(\lambda_1\mathcal{F}_C\left(\varphi \overset{\gamma}{*} \psi\right)(y) + \lambda_2\mathcal{F}_C\left(\xi \overset{\eta}{*} \psi\right)(y)\right) = 1 - \lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y) \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (\mathcal{F}_C h)(y) & \lambda_1\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(y) + \lambda_2\cos y\,(\mathcal{F}_C\xi)(y) \\ (\mathcal{F}_C k)(y) & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\mathcal{F}_C h)(y) - \lambda_1\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(y)(\mathcal{F}_C k)(y)$$
$$- \lambda_2\cos y\,(\mathcal{F}_C\xi)(y)(\mathcal{F}_C k)(y),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & (\mathcal{F}_C h)(y) \\ \lambda_3(\mathcal{F}_C\psi)(y) & (\mathcal{F}_C k)(y) \end{vmatrix} = (\mathcal{F}_C k)(y) - \lambda_3(\mathcal{F}_C\psi)(y)(\mathcal{F}_C h)(y).$$

Do đó

$$(\mathcal{F}_C f)(y) = \left(1 + \frac{\lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y)}{1 - \lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y)}\right)\big((\mathcal{F}_C h)(y) - \lambda_1\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(y)(\mathcal{F}_C k)(y) - \\ - \lambda_2 \cos y\,(\mathcal{F}_C \xi)(y)(\mathcal{F}_C k)(y)\big). \tag{13}$$

Theo định lý Winer - Levi, tồn tại hàm $q \in L(\mathbb{R}_+)$ sao cho

$$(\mathcal{F}_C q)(y) = \frac{\lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y)}{1 - \lambda_3(\mathcal{F}_C l)(y)} \tag{14}$$

Từ (1), (2), (5), (13), (14) ta có

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_C f)(y) &= \big(1 + (\mathcal{F}_C q)(y)\big)\big((\mathcal{F}_C h)(y) - \lambda_1\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(y)(\mathcal{F}_C k)(y) \\ &\quad - \lambda_2 \cos y\,(\mathcal{F}_C \xi)(y)(\mathcal{F}_C k)(y)\big) \\ &= (\mathcal{F}_C h)(y) + \mathcal{F}_C\left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)(y) - \lambda_1 \mathcal{F}_C\left(\varphi \overset{\gamma}{*} k\right)(y) \\ &\quad - \lambda_1\gamma(y)(\mathcal{M}^{-1}\varphi)(y)\left(\mathcal{F}_C\left(k \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)\right)(y) - \lambda_2\mathcal{F}_C\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right) \\ &\quad - \lambda_2\mathcal{F}_C\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right)(y)(\mathcal{F}_C q)(y) \\ &= (\mathcal{F}_C h)(y) + \mathcal{F}_C\left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)(y) - \lambda_1 \mathcal{F}_C\left(\varphi \overset{\gamma}{*} k\right)(y) \\ &\quad - \lambda_1\mathcal{F}_C\left(\varphi \overset{\gamma}{*}\left(k \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)\right)(y) - \lambda_2\mathcal{F}_C\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right)(y) - \lambda_2\mathcal{F}_C\left(\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)(y).\end{aligned}$$

Từ đẳng thức này ta có

$$f = h + \left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) - \lambda_1\left(\varphi \overset{\gamma}{*} k\right) - \lambda_1\left(\varphi \overset{\gamma}{*}\left(k \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)\right) - \lambda_2\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right) - \lambda_2\left(\left(\xi \overset{\eta}{*} k\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) \\ \in L(\mathbb{R}_+)$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_C g)(y) &= \big(1 + (\mathcal{F}_C q)(y)\big)\big((\mathcal{F}_C k)(y) - \lambda_3(\mathcal{F}_C \psi)(y)(\mathcal{F}_C h)(y)\big) \\ &= (\mathcal{F}_C k)(y) + \mathcal{F}_C\left(k \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)(y) - \lambda_3\mathcal{F}_C\left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} \psi\right)(y) \\ &\quad - \lambda_3\mathcal{F}_C\left(\left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} \psi\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right)(y).\end{aligned}$$

Vậy nên $g = k + \left(k \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) - \lambda_3\left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} \psi\right) - \lambda_3\left(\left(h \underset{\mathcal{F}_C}{*} \psi\right) \underset{\mathcal{F}_C}{*} q\right) \in L(\mathbb{R}_+)$.

Tài liệu tham khảo

Bateman, H., and Erdélyi, A. (1954). *Tables of Integral Transforms* Vol 1, MC Gray - Hill, New York - Toronto - London.

Churchill, R. V. (1941). *Fourier Series and Boundary Value Problems*, New York.

Kakichev, V. A., Nguyen Xuan Thao (1998). On the design method for the generalized integral convolution, *Izv. Vuzov Mat. 1*, 31-40 (in Russian).

Kakichev, V. A., Nguyen Xuan Thao (2000). On the generalized convolution for H - transforms, *Izv.Vuzov Mat. 10*, 79-84 (in Russian).

Nguyen Xuan Thao, Kakichev, V. A, and Vu Kim Tuan (1998). On the generalized convolution for Fourier cosine and sine transforms, *East - West J. Mat. 1*, 85-90 (in Russian).

Nguyen Xuan Thao, Nguyen Minh Khoa (2004). On the convolution with a weight function for the cosine – Fourier integral transform, *Acta Math. Vietnam, 29,* 149-162.

Nguyen Xuan Thao, Trinh Tuan (2003). On the generalized convolution for *I* - transform, *Acta Math.Vietnam, 28,* 159-174.

Nguyen Xuan Thao, Trinh Tuan (2005). Generalized convolutions of the integral Kontorovich-Lebedev, Fourier sine and cosine transforms, *Annales Uni. Sci. Budapest., Sect. Comp 25,* 37-51.

Nguyen Xuan Thao, Vu Kim Tuan and Nguyen Minh Khoa (2004). On the generalized convolution with a weight function for the Fourier cosine and sine transform, *Frac. Cal. Appl. Ana. 7*, 323-337.