Ổn định mũ hầu chắc chắn đối với lớp phương trình vi phân có trễ với nhiễu ngẫu nhiên

Nguyễn Như Quân[a]

Tóm tắt:

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu một lớp các phương trình vi phân phi tuyến với nhiễu ngẫu nhiên. Trước tiên, chúng tôi giới thiệu điều kiện Lipschitz cục bộ và điều kiện tăng trưởng phi tuyến mới. Sau đó, sử dụng hàm Lyapunov và định lý hội tụ nửa martingale, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định mũ hầu chắc chắn của nghiệm.

Từ khóa: *phương trình vi phân ngẫu nhiên, nhiễu ngẫu nhiên, ổn định mũ hầu chắc chắn*

[a] Trường Đại học Điện lực; 235 Hoàng Quốc Việt, Cổ Nhuế 1, Bắc Từ Liêm, Hà Nội.
e-mail: quan2n@epu.edu.vn

Tạp chí Khoa học Đại học Đông Á, Tập 2, Số 1 (5), Tháng 3.2023, tr. 16-25
ISSN: 2815 - 5807

Almost Surely Exponential Stability of Differential Delay Equations with Stochastic Noise

Nguyen Nhu Quan[a]

Abstract:

In the present paper, we aim to study of a class of nonlinear differential equations with stochastic noise. Firstly, we introduce the condition of local Lipschitz and a new non-linear growth condition. Then by applying Lyapunov function and semi-martingale convergence theorem, we investigate the almost surely exponential stability of solutions.

Key words: *stochastic differential equation, stochastic noise, almost surely exponential stability*

Received: 22.11.2022; Accepted: 15.3.2023; Published: 31.3.2023

[a] University of Electricity; 235 Hoang Quoc Viet street, Co Nhue 1 ward, Bac Tu Liem district, Hanoi city, Vietnam. e-mail: quan2n@epu.edu.vn

ISSN: 2815 - 5807

Dong A University Journal of Science, Vol. 2, No. 1(5), Mar 2023, pp. 16-25

Phần giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi xét một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến với bước nhảy Poisson:

$$dx(t) = f(x(t), x(t-\tau(t)), t)dt + g(x(t), x(t-\tau(t)), t)dw(t) \tag{1}$$
$$+ \int_Z h(x(t), x(t-\tau(t)), t, v)N(dt, dv), t \geq 0.$$

Như đã biết, các phương trình vi phân ngẫu nhiên (SDEs) đã đóng một vai trò quan trọng trong nhiều ngành khoa học và công nghiệp, chẳng hạn như sinh học, vật lý, kinh tế, kỹ thuật và thị trường tài chính. Tuy nhiên, các ứng dụng này phụ thuộc rất nhiều vào sự ổn định ở mức độ lớn. Do đó, sự ổn định của SDEs đã nhận được rất nhiều sự chú ý trong những năm qua và nhiều kết quả liên quan đã xuất hiện trong nhiều tài liệu, ví dụ: xem (Li, 2002; Kushner, 1968; Mao, 1994) Định lý LaSalle được phát triển trong (LaSalle, 1968), và phương pháp Lyapunov đã được nhiều tác giả áp dụng để xử lý các bài toán có yếu tố ngẫu nhiên (ví dụ: xem (Zhu, 2018; Zhu, 2017). Chú ý rằng điều kiện tăng trưởng tuyến tính là bắt buộc trong (Li, 2002; Mao 1994; LaSalle, 1968; Zhu, 2017). Tuy nhiên, điều kiện tăng trưởng tuyến tính đôi khi quá mạnh để có thể thỏa mãn trong thực tế. Do đó, thật thú vị và đầy thách thức khi nghiên cứu sự ổn định của các hệ ngẫu nhiên khi chúng không thỏa mãn điều kiện tăng trưởng tuyến tính.

Trong điều kiện tăng trưởng phi tuyến tính, chúng tôi thiết lập sự ổn định mũ hầu chắc chắn của bài toán (1).

Phần còn lại của bài báo được tổ chức như sau: Trong Kiến thức chuẩn bị, chúng tôi đưa ra một số ký hiệu và bổ đề cần thiết. Trong Kết quả chính, chúng ta thảo luận về tính ổn định mũ hầu chắc chắn của nghiệm.

Kiến thức chuẩn bị

Trong bài báo này, trừ khi có quy định khác, chúng tôi sẽ sử dụng các ký hiệu sau. Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ là một không gian xác suất đầy đủ với một bộ lọc $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ thỏa mãn điều kiện thông thường (nghĩa là nó tăng và liên tục phải khi chứa tất cả các tập có độ đo không (theo độ đo P)). Ký hiệu $|x(t)|$ là chuẩn Euclide của một vectơ trong $\mathbb{R}^n$. Nếu A là một ma trận, chuẩn của nó được ký hiệu là $|A| = \sqrt{trace(A^T A)}$. Ký hiệu $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_m(t))^T (t \geq 0)$ là một chuyển động Brownian m chiều được xác định trên không gian xác suất trên. $a \vee b$ biểu thị giá trị lớn nhất giữa a và b, trong khi $a \wedge b$ biểu thị giá trị nhỏ nhất. $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ là họ các hàm liên tục từ $[-\tau, 0]$ đến $\mathbb{R}^n$, và $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ biểu thị σ-đại số Borel trong $\mathbb{R}^n$.

Cho $\bar{p} = \{\bar{p}(t), t \geq 0\}$ là một là quá trình điểm Poisson $\mathcal{F}_t$-tương thích nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$. Với $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, ở đây $0 \notin$ bao đóng của A, chúng tôi xác định độ đo Poisson N được liên kết với $\bar{p}$ bằng cách

$$N((0,t]\times A):=\#\{0<s\le t,\bar{p}(s)\in A\}=\sum_{t_0<s\le t} I_A(\bar{p}(s)),$$

với # biểu thị lực lượng của tập hợp $\{\cdot\}$. Để đơn giản, ta ký hiệu $N(t,A):=N((0,t]\times A)$. Ta biết, tồn tại một σ-độ đo hữu hạn π sao cho

$$E[N(t,A)]=\pi(A)t,\quad P(N(t,A)=n)=\frac{\exp(-t\pi(A))(\pi(A)t)^n}{n!}.$$

Độ đo này được gọi là độ đo Lévy. Biểu thị bởi $N(t,z)$ một độ đo martingale ngẫu nhiên Poisson $\mathcal{F}_t$-tương thích $\tilde{N}(t,A)$ thỏa mãn $N(t,A)=\tilde{N}(t,A)+\hat{N}(t,A), t>0$. Ở đây $\tilde{N}(t,A)$ biểu thị độ đo ngẫu nhiên Poisson được bù và $\hat{N}(t,A)=\pi(A)t$ biểu thị bộ bù.

Trong bài báo này, chúng tôi giả định rằng độ đo ngẫu nhiên Poisson N độc lập với chuyển động Brown ω. Đối với $Z\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n-\{0\})$, hãy xem xét các SDDE phi tuyến tính sau với bước nhảy Poisson:

$$\begin{aligned} dx(t)&=f(x(t),x(t-\tau(t)),t)dt+g(x(t),x(t-\tau(t)),t)d\omega(t)\\ &+\int_Z h(x(t),x(t-\tau(t)),t,v)N(dt,dv), \end{aligned}\tag{2}$$

với điều kiện ban đầu

$x(0)=x_0=\xi\in C([-\tau,0];\mathbb{R}^n),\tau(\cdot):[0,+\infty)\to[0,\tau], f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n$ $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n\times m}$ và $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times Z\to\mathbb{R}^n$. Với mục đích nghiên cứu tính ổn định, chúng tôi giả định rằng $f(0,0,t)=0, g(0,0,t)=0$.

Định nghĩa 1. *Nghiệm tầm thường của (2) được gọi là ổn định hầu chắc chắn nếu*

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0\quad\text{hầu chắc chắn}$$

với mọi $x_0\in\mathbb{R}^n$

Để nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm cho hệ thống (2), đầu tiên chúng ta áp đặt một số điều kiện cần thiết cho hai hàm f và g.

Giả thiết 2. *(Điều kiện Lipschitz cục bộ) Với mọi số nguyên $k\ge 1$, tồn tại $C_k>0$ sao cho*

$$\begin{aligned} &|f(x_1,y_1,t)-f(x_2,y_2,t)|^2\\ &\vee|g(x_1,y_1,t)-g(x_2,y_2,t)|^2\\ &\le C_k(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2),\\ &\int_Z|h(x_1,y_1,t,v)-h(x_2,y_2,t,v)|^2\pi(dv)\\ &\le C_k(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2), \end{aligned}\tag{3}$$

với mọi $(x_j,y_j,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+,|x_j|\vee|y_j|\le k\ (j=1,2)$.

Rõ ràng, từ Giả thiết 1 suy ra tồn tại nghiệm cực đại cục bộ duy nhất trên $[-\tau, \tau_e]$ của hệ (2), trong đó τ_e là thời gian bùng nổ. Để thuận tiện cho người đọc, chúng tôi phát biểu kết quả này dưới dạng bổ đề sau.

Bổ đề 3. *Giả sử giả thiết 2 đúng. Khi đó, với bất kỳ giá trị ban đầu nào ξ, hệ (2) có nghiệm cực đại cục bộ duy nhất trên $-\tau < t < \tau_e$.*

Để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất nghiệm cũng như tính ổn định cho hệ (2), W. Zhou (Mao, 2016) đã sử dụng điều kiện Lipschitz cục bộ và điều kiện tăng trưởng tuyến tính. Tuy nhiên, điều kiện tăng trưởng tuyến tính rất hạn chế và nhiều mô hình thực tế không thỏa mãn điều kiện đó. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ giới thiệu một điều kiện phi tuyến tổng quát mới thay thế cho điều kiện tăng tuyến tính, đồng thời với điều kiện đó chúng ta cũng có thể chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm cũng như tính ổn định cho hệ (2). Bây giờ, chúng tôi giới thiệu điều kiện tăng trưởng phi tuyến tổng quát như sau.

Giả thiết 4. *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$, tồn tại bốn hằng số không âm a_1, a_2, a_3 và a_4, sao cho*

$$x^T f(x,y,t) + \frac{1}{2}|g(x,y,t)|^2 \leq a_1|x|^2 - a_2|x|^{r_1+2} + a_3|x|^{r_1+2} + a_4|y|^{r_2+2},$$

ở đây $r_1 > 0$ và $r_2 > 0$ là các hằng số.

Giả thiết 5. *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $t \geq 0$, tồn tại ba hằng số không âm b_1, b_2, b_3 và một hàm $\bar{h}(v)$, sao cho*

$$|x + h(x,y,t,v)|^2 \leq \bar{h}(v)(b_1|x|^2 + b_2|x|^{r_3+2} + b_3|y|^{r_3+2}), \tag{4}$$

ở đây $r_3 > 0$ là một hằng số và hàm $\bar{h}(v)$ thỏa mãn $C_{\bar{h}} = \int_Z \bar{h}(v)\pi(dv) < \infty$.

Giả thiết 6. *$\tau(\cdot)$ vi phân liên tục và tồn tại hằng số u sao cho*

$$\tau'(t) \leq u < 1.$$

Giả thiết 7. *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$, tồn tại bốn hằng số không âm a_1, a_2, a_3 và a_4, sao cho*

$$x^T f(x,y,t) + \frac{1}{2}|g(x,y,t)|^2 \leq -a_1|x|^2 - a_2|x|^{r_1+2} + a_3|x|^{r_1+2} + a_4|y|^{r_2+2}.$$

Ký hiệu $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ họ của tất cả các hàm liên tục không âm $V(x,t)$, liên tục khả vi hai lần theo biến x và một lần theo biến t được xác định trên $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Cho $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, chúng tôi định nghĩa một toán tử $\mathcal{L}V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bởi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x,y,t) &= V_t(x,t) + V_x(x,t)f(x,y,t)\\ &+ \frac{1}{2}tr[g^T(x,y,t)V_{xx}(x,t)g(x,y,t)]\end{aligned}$$

$$+\int_Z [V(x+h(x,y,t,v),t)-V(x,t)]\pi(dv)$$

(5)

ở đó

$$V_t(x,t)=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}, V_x(x,t)=\left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_n}\right), V_{xx}(x,t)=\left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}.$$

Bổ đề 8. *(Định lý hội tụ nửa martingale (Zhu, 2014)). Gọi $A(t)$ và $U(t)$ là hai quá trình tăng tương thích liên tục trên $t \ge 0$ với $A(0)=U(0)$ hầu chắc chắn. Gọi $M(t)$ là một martingale cục bộ liên tục có giá trị thực với $M(0)=0$ hầu chắc chắn và đặt ξ là một biến ngẫu nhiên F_0-đo được không âm sao cho $E\xi < \infty$.*

Định nghĩa $X(t)=\xi + A(t) - U(t) + M(t)$ cho $t \ge 0$. Nếu $X(t)$ không âm thì

$$\left\{\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty\right\} \subset \left\{\lim_{t\to\infty} X(t) < \infty\right\} \cap \left\{\lim_{t\to\infty} U(t) < \infty\right\} \text{ hầu chắc chắn,}$$

với $C \subset D$ hầu chắc chắn, nghĩa là $\mathbf{P}(C \cap D^c)=0$, Đặc biệt, nếu $\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty$ hầu chắc chắn, thì với xác suất một,

$$\lim_{t\to\infty} X(t) < \infty, \lim_{t\to\infty} U(t) < \infty, -\infty < M(t) < +\infty.$$

Kết quả chính

Trong phần này, chúng ta sẽ thảo luận về tính ổn định mũ hầu chắc chắn của nghiệm.

Định lý 1. *Giả sử các điều kiện 2, 5, 6 và 7 được thỏa mãn. Hơn nữa, nếu các điều kiện sau thỏa mãn:*

$$r_1 \ge r_2 \vee r_3, \quad 2a_1 + \pi(Z) - b_1 C_{\bar{h}} > 0$$

và

$$a_2 > \frac{e^{\varepsilon\tau}}{1-u} a_4 + a_3 + \frac{1}{2}\left(b_2 + \frac{1}{1-u} b_3\right) C_{\bar{h}}.$$

(6)

Khi đó, đối với mọi dữ kiện ban đầu $\xi \in C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, tồn tại một nghiệm toàn cục duy nhất $x(t)$ cho (2) trên $t \in [-\tau,\infty)$, ổn định mũ hầu chắc chắn, tức là

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)| \le -\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{hầu chắc chắn}$$

Chứng minh. Vì các hàm f và g thỏa mãn điều kiện Lipschitz cục bộ, theo Bổ đề 3 ta thấy rằng với mọi giá trị ban đầu $x(0) = x_0 = \xi \in \mathbb{R}^n$, tồn tại duy nhất một nghiệm cục bộ trên $-\tau < t < \tau_e$, trong đó τ_e là thời gian bùng nổ. Để chứng minh nghiệm này là nghiệm toàn cục, ta cần chỉ ra rằng $\tau_e = \infty$ hầu chắc chắn. Cho $k_0 > 0$ đủ lớn sao cho $k_0 > |x_0|$. Với mỗi số nguyên $k \geq k_0$, ta định nghĩa thời điểm dừng

$$\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e) : |x(t)| \geq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nếu ta có thể chứng minh được $\tau_\infty = \infty$ hầu chắc chắn, thì $\tau_e = \infty$ hầu chắc chắn, điều này nghĩa là $x(t)$ là nghiệm toàn cục duy nhất. Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng $\mathbf{P}(\tau_k \leq t) \to 0\ (k \to \infty, t > 0)$. Ta định nghĩa $V(x(t), t) = |x(t)|^2$, suy ra $EV(x(t \wedge \tau_k), t \wedge \tau_k) \geq \mathbf{P}(\tau_k \leq t) V(x(\tau_k), \tau_k)$. Điều này nghĩa là, ta cần chứng minh rằng $EV(x(t \wedge \tau_k), t \wedge \tau_k) < +\infty$ khi $V(x(\tau_k), \tau_k) = |x(\tau_k)|^2 = k^2 \to \infty (k \to \infty)$. Sử dụng công thức Itô ta có

$$EV(x(t \wedge \tau_k), t \wedge \tau_k) = V(x(0), 0) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} \mathcal{L}V(x(s), y(s), s) ds \tag{7}$$

Nhờ các giả thiết 2 và 4, ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t), y(t), t) \leq\ & 2[a_1|x(t)|^2 - a_2|x(t)|^{\gamma_1+2} + a_3|x(t)|^{\gamma_1+2} \\ & + a_4|y(t)|^{\gamma_2+2}] + \int_Z [|x + h(x, y, t, v)|^2 - |x(t)|^2]\pi(dv).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t), y(t), t) \leq\ & (2a_1 + b_1 C_{\bar{h}} - \pi(Z))|x(t)|^2 + 2a_4(|y(t)|^{r_2+2} - |x(t)|^{r_2+2}) \\ & + b_3 C_{\bar{h}}(|y(t)|^{r_3+2} - |x(t)|^{r_3+2}) - 2a_2|x(t)|^{r_1+2} \\ & + (2a_3 + 2a_4)|x(t)|^{r_2+2} + (b_2 + b_3)C_{\bar{h},p}|x(t)|^{r_3+2}.\end{aligned}$$

Sử dụng các ước lượng tích phân ta suy ra

$$\begin{aligned}EV(x(t \wedge \tau_k), t \wedge \tau_k) \leq\ & E \parallel \xi \parallel^2 + H_0 t + (2a_1 + b_1 C_{\bar{h}} - \pi(z)) E \int_0^t |x(t \wedge \tau_k)|^2 ds \\ & + \frac{2}{1-u} a_4 E \int_{-\tau}^0 |x(s)|^{r_2+2} ds \\ & + \frac{1}{1-u} b_3 C_{\bar{h}} E \int_{-\tau}^0 |x(s)|^{r_3+2} ds\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Grownwall, ta được

$$EV(x(t \wedge \tau_k), t \wedge \tau_k) \leq H_t e^{(-2a_1 + b_1 C_{\bar{h}} - \pi(Z))t}$$

ở đây

$$H_t = H_0 t + E \parallel \xi \parallel^2 + \frac{2}{1-u} a_4 \tau E \parallel \xi \parallel^{r_2+2} + \frac{1}{1-u} b_3 C_{\bar{h}} \tau E \parallel \xi \parallel^{r_3+2}.$$

Cho $k \to \infty$, ta được

$$E|x(t)|^2 \leq H_t e^{(-2a_1 + b_1 C_{\bar{h}} - \pi(Z))t}.$$

Vì $t > 0$ tùy ý, điều này chứng tỏ với mỗi điều kiện đầu $\xi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, tồn tại nghiệm toàn cục duy nhất $x(t)$ trên $t \in [-\tau, \infty)$.

Định nghĩa $V(x,t) = |x(t)|^2$. Khi đó, theo công thức Itô, ta có

$$e^{\varepsilon t}V(x(t),t) = V(\xi(0),0) + \int_0^t e^{\varepsilon s}[\mathcal{L}V(x(s),y(s),t) + \varepsilon V(x(s),s)]ds + M(t), \tag{8}$$

ở đây

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t),y(t),t) \le {}& -2a_1|x(t)|^2 - 2a_2|x(t)|^{r_1+2} + 2a_3|x(t)|^{r_2+2} + 2a_4|y(t)|^{r_2+2} \\ & +b_1C_{\bar{h}}|x(t)|^2 + b_2C_{\bar{h}}|x(t)|^{r_3+2} + b_3C_{\bar{h}}|y(t)|^{r_3+2} - \pi(z)|x(t)|^2,\end{aligned} \tag{9}$$

và

$$\begin{aligned}M(t) = {}& \int_0^t e^{\varepsilon s}V_x(x(s),s)g(x(s),y(s),s)d\omega(s) + \int_0^t\int_Z e^{\varepsilon s}[V(x(s) \\ & + h(x(s),y(s),s,v))]\widetilde{N}(ds,dv)\end{aligned}$$

là một martingale cục bộ liên tục có giá trị thực với $M(0) = 0$. Ta có

$$|y(t)|^{r_2+2} = e^{\varepsilon\tau}|x(t)|^{r_2+2} + (|y(t)|^{r_2+2} - e^{\varepsilon\tau}|x(t)|^{r_2+2}), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}& b_2C_{\bar{h}}|x(t)|^{r_3+2} + b_3C_{\bar{h}}|y(t)|^{r_3+2} \\ & \quad = (b_2C_{\bar{h}} + b_3C_{\bar{h}}e^{\varepsilon\tau})|x(t)|^{r_3+2} + b_3C_{\bar{h}}(|y(t)|^{r_3+2} - e^{\varepsilon\tau}|x(t)|^{r_3+2}).\end{aligned} \tag{11}$$

Vì vậy, từ (9)-(11) suy ra

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t),y(t),t) + \varepsilon V(x(t),t) \le {}& (\varepsilon - 2a_1 - \pi(Z) + b_1C_{\bar{h}})|x(t)|^2 - 2a_2|x(t)|^{r_1+2} \\ & +(2a_3 + 2a_4e^{\varepsilon\tau})|x(t)|^{r_2+2} + (b_2C_{\bar{h}} + b_3C_{\bar{h}}e^{\varepsilon\tau})|x(t)|^{r_3+2} \\ & +2a_4(|y(t)|^{r_2+2} - e^{\varepsilon\tau}|x(t)|^{r_2+2}) + b_3C_{\bar{h}}(|y(t)|^{r_3+2} - e^{\varepsilon\tau}|x(t)|^{r_3+2}).\end{aligned} \tag{12}$$

Thế (12) vào (8) thu được

$$\begin{aligned}e^{\varepsilon t}V(x(t),t) \le {}& V(\xi(0),0) + (\varepsilon - 2a_1 - \pi(Z) + b_1C_{\bar{h}})\int_0^t e^{\varepsilon s}|x(s)|^2 ds \\ & +2a_4\int_0^t e^{\varepsilon s}(|y(s)|^{r_2+2} - e^{\varepsilon\tau}|x(s)|^{r_2+2})ds \\ & +b_3C_{\bar{h}}\int_0^t e^{\varepsilon s}(|y(s)|^{r_3+2} - e^{\varepsilon\tau}|x(s)|^{r_3+2})ds \\ & -2a_2\int_0^t e^{\varepsilon s}|x(s)|^{r_1+2}ds + (2a_3 + 2a_4e^{\varepsilon\tau})\int_0^t e^{\varepsilon s}|x(s)|^{r_2+2}ds\end{aligned}$$

$$+(b_2 C_{\overline{h}} + b_3 C_{\overline{h}} e^{\varepsilon\tau}) \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^{2+r_3} ds + M(t).$$

(13)

Bằng cách sử dụng Giả thiết 0.6 và tính chất tích phân, chúng ta thu được bất đẳng tích phân sau.

$$\int_0^t e^{\varepsilon s}(|y(s)|^{r_2+2}) ds \leq \frac{e^{\varepsilon\tau}}{1-u} \int_{-\tau}^0 e^{\varepsilon s} |x(s)|^{r_2+2} ds.$$

(14)

Sau đó chúng ta có thể dễ dàng có

$$+\frac{}{1-u} e^{\varepsilon\tau} \int_{-\tau} e^{\varepsilon s} |x(s)|^{r_2+2} ds.$$

(15)

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\varepsilon s}(|y(s)|^{r_3+2} - e^{\varepsilon\tau}|x(s)|^{r_3+2}) ds \leq{}& \frac{u}{1-u} e^{\varepsilon\tau} \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^{r_3+2} ds \\ &+ \frac{1}{1-u} e^{\varepsilon\tau} \int_{-\tau}^0 e^{\varepsilon s} |x(s)|^{r_3+2} ds.\end{aligned}$$

(16)

Thế (14)-(16) vào (13) suy ra

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon t} V(x(t),t) \leq{}& V(\xi(0),0) + (\varepsilon - 2a_1 - \pi(Z) + b_1 C_{\overline{h}}) \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^2 ds \\ &+ \frac{2}{1-u} a_4 \int_{-\tau}^0 e^{\varepsilon(s+\tau)} |x(s)|^{r_2+2} ds + \frac{1}{1-u} b_3 C_{\overline{h}} \int_{-\tau}^0 e^{\varepsilon(s+\tau)} |x(s)|^{r_3+2} ds \\ &-2a_2 \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^{r_1+2} ds + \left(2a_3 + \frac{e^{\varepsilon\tau}}{1-u} 2a_4\right) \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^{r_2+2} ds \\ &+ \left(b_2 + \frac{e^{\varepsilon\tau}}{1-u} b_3\right) C_{\overline{h}} \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^{r_3+2} ds + M(t). \\ ={}& V(\xi(0),0) + \frac{2}{1+u} a_4 \int_{-\tau}^0 e^{\varepsilon(s+\tau)} |x(s)|^{r_2+2} ds + \frac{1}{1-u} b_3 C_{\overline{h}} \int_{-\tau}^0 e^{\varepsilon(s+\tau)} |x(s)|^{r_3+2} ds \\ &-J_0(x(t),t) + M(t), \end{aligned} \qquad (17)$$

ở đó

$$\begin{aligned} J_0(x(t),t) ={}& (2a_1 + \pi(Z) - b_1 C_{\overline{h}} - \varepsilon) \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(t)|^2 ds + 2a_2 \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^{2+r_1} ds \\ &-\left(2a_3 + \frac{e^{\varepsilon\tau}}{1-u} 2a_4\right) \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^{2+r_2} ds - C_{\overline{h}}(b_2 + b_3 e^{\varepsilon\tau}) \int_0^t e^{\varepsilon s} |x(t)|^{2+r_3} ds. \end{aligned}$$

(18)

Sử dụng (6), chúng ta có thể chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $2a_1 + \pi(Z) - b_1 C_{\bar{h}} - \varepsilon > 0$ và có thể dễ dàng nhận được:

$$e^{\varepsilon t}V(x(t),t) \le V(\xi(0),0) + \frac{2}{1-u}a_4\int_{-\tau}^{0} e^{\varepsilon(s+\tau)}|x(s)|^{r_2+2}ds$$
$$+\frac{1}{1-u}b_3 C_{\bar{h}}\int_{-\tau}^{0} e^{\varepsilon(s+\tau)}|x(s)|^{r_3+2}ds + M(t). \tag{19}$$

Áp dụng định lý hội tụ nửa martingale không âm, ta có

$$\limsup_{t\to\infty} e^{\varepsilon t}V(x(t),t) < \infty, \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Do đó, tồn tại một biến ngẫu nhiên dương hữu hạn H_0 sao cho

$$\sup_{0\le t<\infty} e^{\varepsilon t}V(x(t),t) \le H_0, \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

suy ra

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln|x(t)| \le -\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Điều này hoàn thành chứng minh về tính ổn định mũ hầu chắc chắn của nghiệm.

Tài liệu tham khảo

Kushner, H. J. (1968). On the stability of processes defined by stochastic difference-differential equations. *Journal of Differential Equations*, 4(3), 424-443.

LaSalle, J. P. (1968). Stability theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential equations*, 4(1), 57-65.

Li, C. W., Dong, Z., & Situ, R. (2002). Almost sure stability of linear stochastic differential equations with jumps. *Probability theory and related fields*, 123(1), 121-155.

Mao, W., You, S., & Mao, X. (2016). On the asymptotic stability and numerical analysis of solutions to nonlinear stochastic differential equations with jumps. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 301, 1-15.

Mao, X. (1994). *Exponential stability of stochastic differential equations*. Marcel Dekker.

Zhu, Q. (2014). Asymptotic stability in the pth moment for stochastic differential equations with Lévy noise. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 416(1), 126-142.

Zhu, Q. (2017). Razumikhin-type theorem for stochastic functional differential equations with Lévy noise and Markov switching. *International Journal of Control*, 90(8), 1703-1712.

Zhu, Q. (2018). Stability analysis of stochastic delay differential equations with Lévy noise. *Systems & Control Letters*, *118*, 62-68.